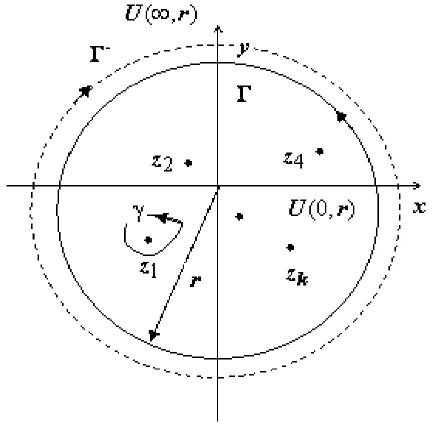
Основная теорема о вычетах. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всех точках ограниченной замкнутой области $\overline{D}$, границей которой является контур L, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, расположенных внутри L. Тогда $\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$.

Док-во. Окружим каждую особою точку z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ контуром $\gamma_k = \{z \mid |z - z_k| = \rho_k\}$ таким, чтобы все контуры лежали в области D и не пересекались. В области, ограниченной контурами $L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n$, функция аналитична, поэтому по Теореме Коши для многосвязной области $\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \oint\limits_{\gamma_n} f(z)dz$. Из определения вычета следует, что $\oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$,

следовательно,

$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z_2} f(z) + \ldots + 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z_n} f(z) = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname*{res}\limits_{z_k} f(z)$, что и требовалось доказать.



Вычет функции в бесконечно удалённой особой точке. Для конечной особой точки a $\operatorname*{res}\limits_{a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(t)dt$, где γ - контур, не содержащий других, кроме a, особых точек, проходимый так, что область, им ограниченная и содержащая особую точку, остаётся слева (против часовой стрелке). Определим $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z)$ аналогичным образом: $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^-} f(z)dz$, где Γ^- - контур, ограничивающий такую окрестность $U(\infty, r)$ точки $z = \infty$, которая не содержит других особых точек, и проходимый так, что эта окрестность остаётся слева (т.е. по часовой стрелке). Таким образом, все остальные (конечные) особые точки функции должны находиться внутри контура Γ^-. Изменим направление обхода контура Γ^-: $\oint\limits_{\Gamma^-} f(z)dz = -\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz$. По основной теореме о вычетах $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{k} \operatorname*{res}\limits_{z_j} f(z)$, где суммирование ведётся по всем конечным особым точкам. Поэтому, окончательно, $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f(z) = -\sum\limits_{j=1}^{k} \operatorname*{res}\limits_{z_j} f(z)$, т.е. вычет в бесконечно удалённой особой точке равен сумме вычетов по всем конечным особым точкам, взятой с противоположным знаком. Как следствие, имеет место **теорема о полной сумме вычетов**: если функция $w = f(z)$ аналитична всюду в плоскости C, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_k$, то сумма вычетов во всех конечных особых точках и вычета в бесконечности равна нулю.

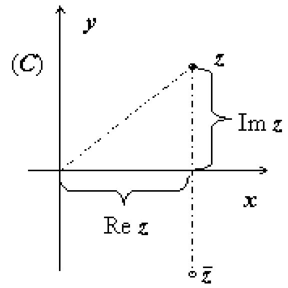
Утверждение Жордана *Пусть функция* $f(z)$ *непрерывна в области* $D\colon\ |z| \geqslant R_0,\ \ \operatorname{Im} z \geqslant -a$ *и* $\lim\limits_{R\to\infty} \max\limits_{C_R} |f(z)| = 0$, *где* C_R*— дуга окружности* $|z| = R,\ \ \operatorname{Im} z \geqslant -a$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$ *справедливо равенство*

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz = 0.$$

(4.31)

Определение комплексного числа. Действия с комплексными числами.

Опр.19.1.1. **Комплексным числом** z будем называть упорядоченную пару действительных чисел x, y, записанную в форме $z = x + iy$, где i - новый объект ("мнимая единица"), для которого при вычислениях полагаем $i^2 = -1$.



Первая компонента комплексного числа z, действительное число x, называется действительной частью числа z, это обозначается так: $x = \mathrm{Re}z$; вторая компонента, действительное число y, называется мнимой частью числа z: $y = \mathrm{Im}z$.

Опр.19.1.2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \{(x_1 = x_2)\wedge(y_1 = y_2)\}$.

Множество комплексных чисел неупорядочено, т.е. для комплексных чисел не вводятся отношения "больше" или "меньше".

Геометрически комплексное число $z = x + iy$ изображается как точка с координатами (x, y) на плоскости. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью C.

Опр.19.1.3. Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z, определяемое соотношением $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, т.е. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$.

Это означает, что геометрически комплексные числа складываются как векторы на плоскости, покоординатно.

Опр.19.1.4. Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, определяемое соотношением $z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, т.е.$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$.

Аксиомы действительных чисел:

I.1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

I.2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

I.3. Существует такой элемент $0\in Z$, что $0 + z = z$ для $\forall z\in Z$. Этот элемент - число $0 = 0 + 0i$.

I.4. Для каждого элемента $z\in Z$ существует такой элемент $-z$, что $z + -z + 0$. Этот элемент - число $-x - iy$. Сумма чисел z_1 и $-z_2$ называется разностью чисел z_1 и z_2: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Опр.19.1.5. Число $\bar z = x - yi$ называется числом, сопряжённым к числу $z = x + iy$. Часто сопряжённое число обозначается также символом z^*.

Опр.19.1.6. Действительное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$.

Геометрически модуль числа z - длина радиуса вектора точки z; модуль разности чисел z_1 и z_2 равен расстоянию между этими точками: $|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Найдём произведение сопряжённых чисел: $z\cdot\bar z = (x + yi)(x - yi) = (x\cdot x - y\cdot(-y)) + (x\cdot(-y) + y\cdot x)i = x^2 + y^2 = |z|^2$. Таким образом, $z\cdot\bar z$ - всегда неотрицательное действительное число, причём $z\cdot\bar z = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Для нахождения частного комплексных чисел $\dfrac{z_1}{z_2}\ (z_2 \neq 0)$ домножим числитель и знаменатель на число, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\bar z_2}{z_2\cdot\bar z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)\cdot(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Для операции умножения справедливы свойства

II.1. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

II.2. $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$;

II.3. Произведение числа $1 = 1 + 0i \in Z$ на любое число $z \in Z$ равно z;

II.4. Для каждого числа $z \in Z$ существует такое число $z^{-1} \in Z$, что $z \cdot z^{-1} = 1$, $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{|z|^2}$;

Операции сложения и умножения подчиняется закону дистрибутивности:

III.1. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

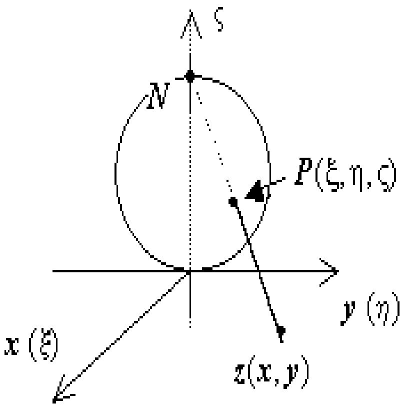
Операция сопряжения имеет следующие свойства:

IV. $\bar{\bar{z}} = z$; $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$; $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\,z \cdot i$; $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Ко́мпле́ксная плоскость[1] — это двумерное вещественное пространство $\mathbb{R}^2$, которое изоморфно полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. Каждая точка такого пространства — это упорядоченная пара вида (x, y), где x и y — вещественные числа, и где первый элемент пары соответствует вещественной части, а второй элемент пары соответствует мнимой части комплексного числа $z = x + iy$:

$$x = \mathrm{Re}\, z,$$
$$y = \mathrm{Im}\, z.$$

Сфера Римана. Бесконечно удалённая точка. Риман предложил применять для геометрического представления комплексной плоскости сферу. Вместе с координатами x, y в плоскости C рассмотрим трёхмерную прямоугольную систему координат ξ, η, ζ, такую, что оси ξ, η совпадают с осями x, y, а ось ζ им перпендикулярна. Поместим в это пространство сферу единичного диаметра $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, касающуюся плоскости x, y в начале координат своим южным полюсом. Каждой точке $z(x, y) = x + iy \in C$ поставим в соответствие точку $P(\xi, \eta, \zeta)$ сферы, получающуюся при пересечении луча, проведённого через точку z и северный полюс N сферы, со сферой.



Очевидно, соответствие $z \leftrightarrow P$ взаимно однозначно отображает плоскость C на сферу с единственной исключённой точкой - северным полюсом N. Такое соответствие $z \leftrightarrow P$ называется стереографической проекцией.

Пополним комплексную плоскость C новым объектом - бесконечно удалённой точкой $z = \infty$, которую будем считать прообразом северного полюса N при стереографической проекции. Такую пополненную плоскость будем называть замкнутой комплексной плоскостью и обозначать $\bar{C}$. Если не прибегать к стереографической проекции, то несобственная точка $z = \infty$ рассматривается как единственная предельная точка любой последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел таких, что $|z_n| \to \infty$ при $n \to \infty$, независимо от того, по какому пути точки последовательности удаляются от начала координат.

Задание кривых и областей на комплексной плоскости.

Так как $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ равен расстоянию между точками z и z_0, то

1. $|z - z_0| = R$ - уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0.
2. $|z - z_0| \le R$ - замкнутая область, ограниченная этой окружностью, т.е. круг радиуса R с центром в точке z_0, включающий свою границу.

3. $|z - z_0| > R$ - открытая область, состоящая из точек, находящихся вне круга радиуса R с центром в z_0; круг не включен в эту область.

4. $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ - эллипс, построенный на точках z_1 и z_2, рассматриваемых как фокусы (большая полуось равна $2a$, малая - $\sqrt{a^2 - \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}}$) (рис. 1.). Области, лежащие внутри и вне эллипса, описываются соответствующими неравенствами.

5. $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$ - гипербола с фокусами в точках z_1 и z_2; расстояние между фокусами $2c = |z_1 - z_2|$, между вершинами $2a$ (рис.2). Уравнение $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ даёт ветвь гиперболы, расположенную ближе к фокусу z_2; неравенство $|z - z_1| - |z - z_2| > 2a$ - открытую область, содержащую фокус z_1 и ограниченную соответствующей ветвью гиперболы.

6. $\operatorname{Re} z = a$ (или $x = a$) - прямая, параллельная оси Oy. $\operatorname{Re} z \geq a$ - область, лежащая справа от этой прямой (включая прямую); $\operatorname{Re} z < a$ - область слева от прямой (прямая не включена в область). $\operatorname{Im} z = b$ (или $y = b$) - прямая параллельная оси Ox; $\operatorname{Im} y \geq b$, $\operatorname{Im} y < b$ - области, расположенные выше и ниже этой прямой.

7. $\arg z = \alpha$ - луч, выходящий из точки $z = 0$ под углом α к оси Ox. $\arg(z - z_0) = \alpha$ - луч, выходящий из точки z_0 под углом α к оси Ox. $\alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta$ - область, расположенная между лучами, выходящими из точки z_0 (рис. 3.).

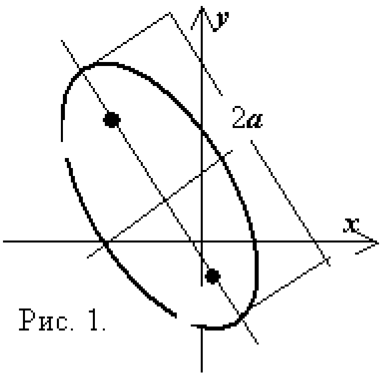


Рис. 1.

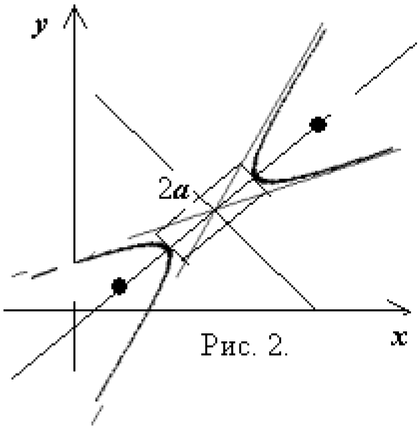


Рис. 2.

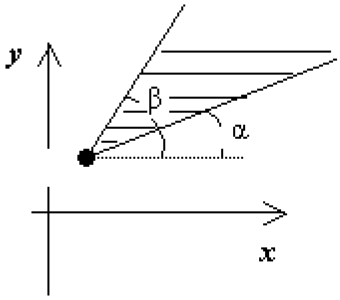
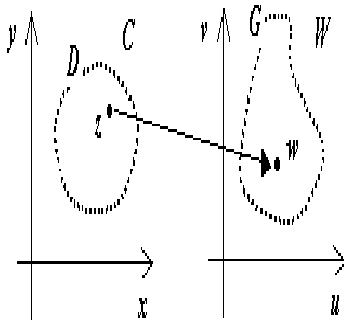


Рис. 3.

<u>Определение функции комплексной переменной</u> ничем не отличается от общего определения функциональной зависимости. Напомним**,** что **областью** на плоскости мы называем любое открытое связное множество точек этой плоскости. Область **односвязна**, если любая подобласть, ограниченная непрерывной замкнутой самонепересекающейся кривой, лежащей в этой области, целиком принадлежит области.



Рассмотрим две плоскости комплексных чисел: $C = \{z \mid z = x + iy\}$ и $W = \{w \mid w = u + iv\}$. Пусть в плоскости C задана область D и задано правило, ставящее в соответствие каждой точке $z \in D$ определённое комплексное число $w \in W$. В этом случае говорят, что на области D определена **однозначная функция** $w = f(z)$ (или определено **отображение** $f : z \to w$). Область D называется областью определения функции, множество $\{w \mid w \in W, w = f(z), z \in D\}$ - множеством значений функции (или образом области D при отображении f.

Если каждому $z \in D$ ставится в соответствие несколько значений $w \in W$ (т.е. точка z имеет несколько образов), то функция $w = f(z)$ называется **многозначной**.

Функция $w = f(z)$ называется **однолистной** в области $D \subset C$, если она взаимно однозначно отображает область D на область $G \subset W$ (т.е. каждая точка $z \in D$ имеет единственный образ $w \in G$, и обратно, каждая точка $w \in G$ имеет единственный прообраз $z \in D$.

<u>Действительная и мнимая часть функции комплексной переменной.</u> Так как $w = u + iv$, $z = x + iy$, то зависимость $w = f(z)$ можно записать в виде $w = u + iv = f(z) = f(x + iy) = \operatorname{Re} f(x + iy) + i \operatorname{Im} f(x + iy)$. Таким образом, **задание комплекснозначной функции $w = f(z)$ комплексной переменной z равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$** двух действительных переменных x, y.

<u>Линейная функция</u> $w = a z + b$, где $a = a_1 + ia_2 = |a| \cdot e^{i \arg a}$, $b = b_1 + ib_2$ - фиксированные комплексные числа, a_1, b_1 - их действительные части, a_2, b_2 - их мнимые части.

Предел ФКП.
Пусть функция $w = f(z)$ определена в проколотой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Комплексное число $w_0 = u_0 + iv_0$ называется пределом функции при $z \to z_0$, если для любой ε-окрестности $U(w_0, \varepsilon)$ ($\varepsilon>0$) точки w_0 найдётся такая проколотая δ-окрестность $\overset{0}{U}(z_0, \delta)$ точки z_0, что для всех $z \in \overset{0}{U}(z_0, \delta)$ значения $f(z)$ принадлежат $U(w_0, \varepsilon)$. Другими словами, если z_0 - собственная точка плоскости, то для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать такое $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ (аналогично расписывается определение для несобственной точки $z_0 = \infty$). Таким образом, на языке ε - δ определение предела ФКП полностью совпадает с определением предела функции одной действительной переменной; обозначается предел, как обычно: $w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ означает, что $|(u(x, y) + iv(x, y)) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon$, или $|(u(x, y) - u_0) + i(v(x, y) - v_0)| < \varepsilon$. Для модуля комплексных чисел справедливы все основные свойства абсолютной величины, в частности $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, поэтому $|(u(x, y) - u_0) + i(v(x, y) - v_0)| < \varepsilon$ $\Rightarrow |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |u(x,y) - u_0| < \varepsilon, \\ |v(x,y) - v_0| < \varepsilon. \end{cases}$ Отсюда легко получить, что $w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \\ v_0 = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \end{cases}$. Таким образом, существование предела функции комплексной переменной равносильно существованию пределов двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ двух действительных переменных. Поэтому в комплексный анализ автоматически переносятся все теоремы о пределах функции в точке (предел суммы функций и т.д.). Так же можно доказать, что если $w_0 = |w_0|\cdot(\cos \arg w_0 + i \sin \arg w_0) \ne 0$, то $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|, \\ \exists \lim\limits_{z\to z_0} \arg(f(z)) = \arg(w_0) \end{cases}$ (для существования нулевого предела достаточно, чтобы $\exists \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = 0$).

Непрерывность ФКП. Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Функция называется непрерывной в точке z_0, если:

1. существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;
2. $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

Как и в случае предела, можно показать, что $w = f(z)$ будет непрерывной в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), поэтому на ФКП переносятся все основные теоремы о непрерывности функций.

Определение производной. Аналитичность ФКП. Пусть $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ определена, однозначна и принимает собственные значения в окрестности точки $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy} \in \boldsymbol{C}$. Производной функции $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ в точке $\boldsymbol{z}$ называется предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \dfrac{dw}{dz}$. Функция, имеющая конечную производную в точке $\boldsymbol{z}$, называется дифференцируемой в этой точке.

В этом определении важно, что стремление $\Delta \boldsymbol{z} \to 0$ может проходить по любому пути.

Однозначная функция называется **аналитической (регулярной, голоморфной) в точке *z***, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Однозначная функция называется **аналитической в области *D*,** если она аналитична в каждой точке этой области.

Условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера). Для того, чтобы функция $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ и $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ были дифференцируемы в точке (x,y), и чтобы в этой точке выполнялись соотношения $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Доказательство. **Необходимость.** подойдём к точке z двумя путями - по направлениям $\Delta z = \Delta x$ ($\Delta y = 0$) и $\Delta z = i\Delta y$ ($\Delta x = 0$).

В первом случае: $\Delta w = (u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y)) - (u(x, y) + iv(x, y)) =$
$= (u(x + \Delta x, y) - u(x, y)) + i(v(x + \Delta x, y) - v(x, y)) = \Delta_x u + i\Delta_x v$; $\lim\limits_{\Delta z = \Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Во втором случае: (напомню, что $\frac{1}{i} = -i$) $\Delta w = (u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y)) - (u(x, y) + iv(x, y)) =$
$= (u(x, y + \Delta y) - u(x, y)) + i(v(x, y + \Delta y) - v(x, y)) =$
$\Delta_y u + i\Delta_y v$; $\lim\limits_{\Delta z = i\Delta y \to 0} \frac{\Delta w}{i\Delta y} = -i \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} + \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y v}{\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$. Пределы должны быть равны, поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Достаточность. По предположению теоремы, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x,y), поэтому $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y),\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y),$ где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ - бесконечно малые более высокого порядка по сравнению с $\rho\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$, т.е. $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\beta(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$. Найдём $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

$$\Delta w = \left(u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)\right) - \left(u(x, y) + iv(x, y)\right) = \Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\right) +$$
$$+ i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \left(\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)\right).$$

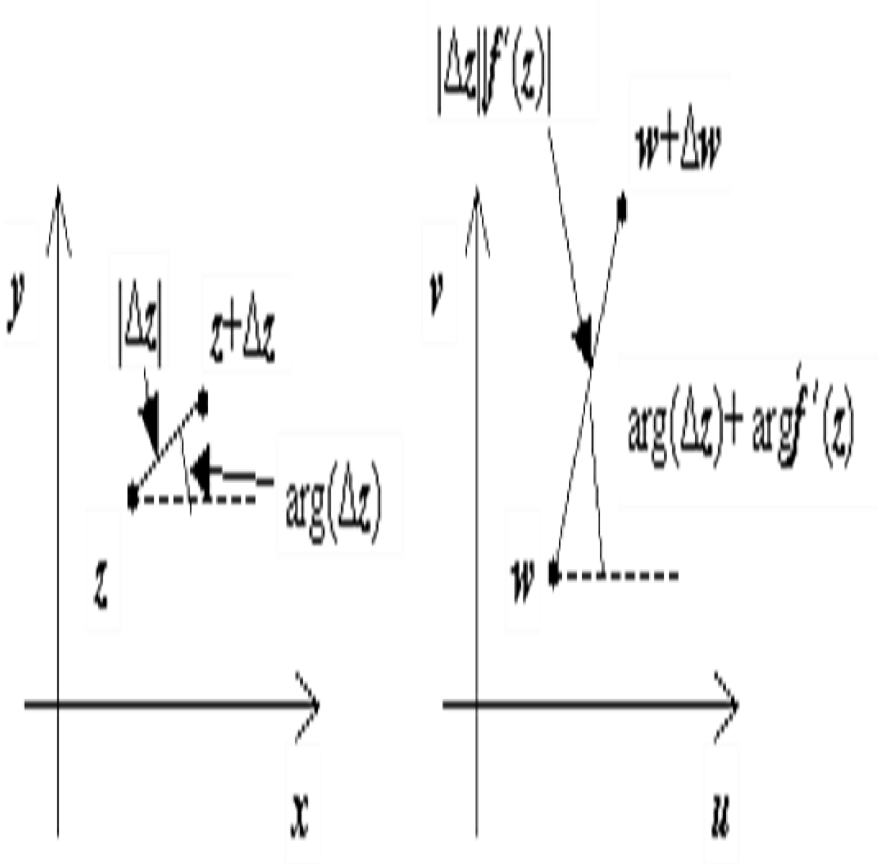
Последнее слагаемое - бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$: $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)|}{|\Delta x + i\Delta y|} = \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\alpha + i\beta|}{\rho} \le \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\alpha|}{\rho} + \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{|\beta|}{\rho} = 0$; далее, в предыдущих слагаемых, пользуясь формулами Коши-Римана, оставим только частные производные по x, т.е. заменим $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$;
тогда

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \left(\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)\right)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)}{\Delta x + i\Delta y} =$$
$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\alpha + i\beta)}{\Delta x + i\Delta y}$. Отсюда следует, что существует $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$, т.е. функция дифференцируема в точке (x,y).

Производная дифференцируемой функции может находиться по любой из формул $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$, эти равенства следуют из условий Коши-Римана. При вычислении производных можно пользоваться всеми правилами действительного анализа: $(Cf)'=Cf',(f\pm g)'=f'\pm g',(fg)'=f'g+fg',\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ (в точках, где $g(z)\neq 0$.

<u>**Гармоничность действительной и мнимой частей аналитической функции.**</u> Дифференцируя первое соотношение Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ по переменной *x*, второе соотношение $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ по переменной *y*, получим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, т.е. $\Delta u=0$ (Δ - оператор Лапласа), т.е. $u(x, y)$ - гармоническая функция. Дифференцируя первое соотношение Коши-Римана по переменной *y*, второе соотношение по переменной *x*, получим $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, т.е. $\Delta v=0$, т.е. $v(x, y)$ - тоже гармоническая функция. Пара гармонических функций, связанных соотношениями Коши-Римана, называется сопряжёнными функциями. Легко доказать, что для любой гармонической в односвязной области *D* функции $u(x, y)$ существует единственная (с точностью до постоянного слагаемого) сопряжённая с ней гармоническая функция $v(x, y)$, т.е. такая функция, что $w=f(z)=u(x, y)+i\,v(x, y)$ - аналитическая функция; и наоборот, для любой гармонической $v(x, y)$ существует сопряжённая с ней гармоническая $u(x, y)$. Пусть, например, дана $u(x, y)$, обозначим $P(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y},\ Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$. Эти функции удовлетворяют условию $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$, т.е. векторное поле $\bar{a}(x,y)=P(x,y)\cdot\bar{i}+Q(x,y)\cdot\bar{j}$ потенциально. Функцию $v(x, y)$ можно найти теперь из системы $\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=P(x,y),\\ \frac{\partial v}{\partial y}=Q(x,y);\end{cases}$ (как это делается при решении уравнения в полных дифференциалах $P(x, y)\cdot dx+Q(x, y)\cdot dx=0$), и как потенциальную для поля $\bar{a}=P\cdot\bar{i}+Q\cdot\bar{j}$ функцию $v(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$.

<u>**Геометрический смысл производной**</u>. Равенство $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ означает, что $\Delta \boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})\cdot\Delta \boldsymbol{z}+\gamma(\Delta \boldsymbol{z})\cdot\Delta \boldsymbol{z}$, где $\gamma(\Delta \boldsymbol{z})\to 0$ при $\Delta \boldsymbol{z}\to 0$. Отсюда, в частности, следует, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке. Будем писать $\Delta \boldsymbol{w}\approx\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})\cdot\Delta \boldsymbol{z}$, пренебрегая слагаемым высшего порядка малости. Пусть в точке $\boldsymbol{z}$ существует $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})\neq 0$. Возьмём точки $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{z}+\Delta \boldsymbol{z}$; пусть $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$, тогда $\Delta \boldsymbol{w}\approx|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})|\cdot \boldsymbol{e}^{i\arg f'(z)}\cdot\Delta \boldsymbol{z}=|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})|\cdot|\Delta \boldsymbol{z}|\cdot \boldsymbol{e}^{i(\arg f'(z)+\arg\Delta z)}$. Таким образом, $|\Delta \boldsymbol{w}|$ в $|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})|$ больше $|\Delta \boldsymbol{z}|$, $\arg\Delta \boldsymbol{w}$ больше $\arg\Delta \boldsymbol{z}$ на $\arg \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})$ для любого $\arg\Delta \boldsymbol{z}$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Следовательно, в окрестности любой точки $\boldsymbol{z}$, в которой $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})\neq 0$ отображение $\boldsymbol{z}\to \boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ действует следующим образом: любой вектор $\overrightarrow{\Delta z}$ растягивается в $|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})|$ раз и поворачивается на угол $\arg \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})$.



Конформность дифференцируемого отображения.

Пусть через точку $\boldsymbol{z}$ проходят две гладкие кривые $\boldsymbol{L}_1$ и $\boldsymbol{L}_2$, касательные $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ к которым образуют с осью $\boldsymbol{Ox}$ углы, соответственно, θ_1 и θ_2. Образы этих кривых $\boldsymbol{L}'_1$ и $\boldsymbol{L}'_2$ при дифференцируемом отображении $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ имеют касательные $\boldsymbol{l}_1'$ и $\boldsymbol{l}_2'$,образующие с действительной осью $\boldsymbol{Ou}$ углы θ_1' и θ_2'. Согласно предыдущему пункту, $\theta_1' = \theta_1 + \arg \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})$, $\theta_2' = \theta_2 + \arg \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z})$, т.е.$\theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1$. Таким образом, дифференцируемое отображение при $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{z}) \neq 0$ сохраняет углы между кривыми. Сохраняется и направление отсчёта углов (т.е. если $\theta_2 > \theta_1$, то $\theta_2' > \theta_1'$).

Любое преобразование плоскости в плоскость, обладающее эти свойством (т.е. свойством сохранения углов), называется **конформным**. Если при этом сохраняется направление отсчёта углов, то преобразование называется **конформным преобразованием первого рода**; если направление отсчёта углов меняется на противоположное, то преобразование называется**конформным преобразованием второго рода**. Мы доказали, что **аналитическая в некоторой области G функция $\boldsymbol{w} = f(z)$осуществляет конформное отображение первого рода во всех точках, в которых производная отлична от нуля**.

Пример конформного отображения второго рода – недифференцируемая функция $w = \bar{z}$.

Числовые ряды с комплексными членами.

19.4.1.1. Основные определения. Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, $\boldsymbol{z}_3$, …, $\boldsymbol{z}_n$, … .Действительную часть числа $\boldsymbol{z}_n$ будем обозначать $\boldsymbol{a}_n$, мнимую - $\boldsymbol{b}_n$(т.е. $\boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{i}\,\boldsymbol{b}_n$, $\boldsymbol{n}$ = 1, 2, 3, …).

Числовой ряд - запись вида $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Частичные суммы ряда: $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2$, $\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3$, $\boldsymbol{S}_4 = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3 + \boldsymbol{z}_4$, …, $\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3 + \ldots + \boldsymbol{z}_n$, …

Определение. Если существует предел $\boldsymbol{S}$ последовательности частичных сумм ряда при $\boldsymbol{n} \to \infty$, являющийся собственным комплексным числом, то говорят, что ряд сходится; число $\boldsymbol{S}$ называют суммой ряда и пишут $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3 + \ldots + \boldsymbol{z}_n + \ldots$ или $\boldsymbol{S} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Абсолютная сходимость.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, составленный из абсолютных величин его членов.

Так же, как и для числовых действительных рядов с произвольными членами, легко доказать, что если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то обязательно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. ($|a_n| \le |z_n|$, $|b_n| \le |z_n|$, поэтому ряды, образованные действительной и мнимой частями ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, сходятся абсолютно). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется условно сходящимся.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ - ряд с неотрицательными членами, поэтому для исследования его сходимости можно применять все известные признаки (от теорем сравнения до интегрального признака Коши).

Свойства сходящихся рядов.

Необходимый признак сходимости ряда. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, то сходится любой его остаток, Обратно, если сходится какой-нибудь остаток ряда, то сходится и сам ряд.

Если ряд сходится, то сумма его остатка после n-го члена стремится к нулю при $n \to \infty$.

Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число c, то сходимость ряда сохранится, а сумма умножится на c.

Сходящиеся ряды (A) и (B) можно почленно складывать и вычитать; полученный ряд тоже будет сходиться, и его сумма равна $S_A \pm S_B$.

Если члены сходящегося ряда сгруппировать произвольным образом и составить новый ряд из сумм членов в каждой паре круглых скобок, то этот новый ряд тоже будет сходиться, и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

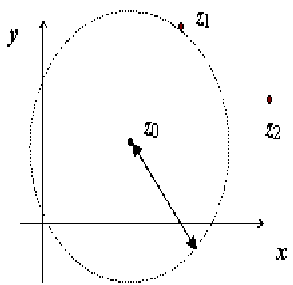
Если ряд сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов сходимость сохраняется и сумма не изменяется.

Если ряды (A) и (B) сходятся абсолютно к своим суммам S_A и S_B, то их произведение при произвольном порядке членов тоже сходится абсолютно, и его сумма равна $S_A \cdot S_A$.

Достаточный признак сходимости ряда: ???

Степенные комплексные ряды.

Степенным рядом с комплексными членами называется ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots$, где a_0, a_1, a_2, ..., a_n, - постоянные комплексные числа (коэффициенты ряда), z_0 - фиксированное комплексное число (центр круга сходимости). Для любого численного значения z ряд превращается в числовой ряд с комплексными членами, сходящийся или расходящийся. Если ряд сходится в точке z, то эта точка называется точкой сходимости ряда. Степенной ряд имеет по меньшей мере одну точку сходимости - точку z_0. Совокупность точек сходимости называется областью сходимости ряда.



Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится в точке $z_1 \ne z_0$, то он абсолютно сходится в любой точке круга $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$;

Если этот ряд расходится в точке z_2, то он расходится в любой точке z, удовлетворяющей неравенству $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ (т.е. находящейся дальше от точки z_0, чем z_2).

Из теоремы Абеля следует существование такого неотрицательного действительного числа R, что ряд абсолютно сходится в любой внутренней точке круга радиуса R с центром в точке z_0, и расходится в любой точке вне этого круга. Число R называется **радиусом сходимости**, круг - **кругом сходимости**. В точках границы этого круга - окружности $|z - z_0| = R$ радиуса R с центром в точке z_0 - ряд может и сходиться, и расходиться. В этих точках ряд из модулей имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$. Возможны такие случаи:

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$ сходится. В этом случае в любой точке окружности $|z - z_0| = R$ ряд сходится абсолютно.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$ расходится, но его общий член $|a_n| \cdot R^n \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае в некоторых точках окружности ряд может сходиться условно, в других - расходиться, т.е. каждая точка требует индивидуального исследования.

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot R^n$ расходится, и его общий член $|a_n| \cdot R^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. В этом случае ряд расходится в любой точке граничной окружности.

1. Степенная функция $w = z^n$, n - натуральное. Определена, однозначна и аналитична на всей плоскости C. Действительно, при $n = 1$ $w = x + iy$, $u = x$, $v = y$, $u'_x = 1 = v'_y$, $u'_y = 0 = -v'_x$, $w' = u'_x + iv'_x = 1$ (или, непосредственно, $w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$). Далее, $w = z^n = z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ дифференцируема как произведение дифференцируемых функций. Её производная $w' = n z^{n-1}$отлична от нуля при $z \neq 0$, следовательно, отображение $w = z^n$ при $n > 1$ конформно в этих точках. (Углы с вершиной в точке $z = 0$ увеличиваются в n раз). Отображение неоднолистно при $n > 1$на всей плоскости C; для его однолистности в некоторой области $D \in C$ необходимо, чтобы область помещалась в некоторый сектор раствора $< \frac{2\pi}{n}$.

2. Показательная функция $w = e^z$. Определим эту функцию предельным соотношением $e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Докажем, что этот предел существует при $\forall z = x + iy \in C$: $1 + \frac{x+iy}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n}$, модуль этого числа обозначим M_n: $M_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{1/2}$, аргумент - Φ_n: $\Phi_n = \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n}$ (при достаточно больших n дробь $1 + z/n$ лежит в правой полуплоскости). $\exists \lim_{n \to \infty} M_n^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^x$; $\exists \lim_{n \to \infty} n\Phi_n = \lim_{n \to \infty} n \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n} = y$, следовательно, существует $\exists \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y)$.

При мнимом $z = iy$ ($x = 0$) отсюда следует, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, теперь формула Эйлера окончательно доказана.

Кратко перечислим свойства этой функции.

1. Функция $w = e^z$ аналитична на всей плоскости C, и $(e^z)' = e^z$ (доказано в разделе **19.3.3. Примеры**

вычисления производных).

2. $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ (проверяется непосредственно).

3. Функция $w = e^{z}$ периодическая, с мнимым основным периодом $2\pi\, i$ ($e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$, $e^{z+2\pi i} = e^{z}\cdot e^{2\pi i} = e^{z}$).

Из этого свойства следует, что для однолистности отображения $w = e^{z}$ необходимо, чтобы область D не содержала пары точек, связанных соотношением $z_2 - z_1 = 2\, n\pi\, i$, такой областью является, например, полоса $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, преобразуемая в плоскость C с выброшенной положительной полуосью.

3. Тригонометрические функции. Определим эти функции соотношениями $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Все свойства этих функций следуют из этого определения и свойств показательной функции. Эти функции периодичны с периодом 2π, первая из них четна, вторая - нечетна, для них сохраняются обычные формулы дифференцирования, например,

$$(\cos z)' = \frac{(e^{iz})' + (e^{-iz})'}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z,$$

сохраняются обычные тригонометрические соотношения ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ - проверяется непосредственно, $\cos z = \sin\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, формулы сложения и т.д.)

4. Гиперболические функции. Эти функции определяются соотношениями $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$. Из определений следует связь тригонометрических и гиперболических функций:

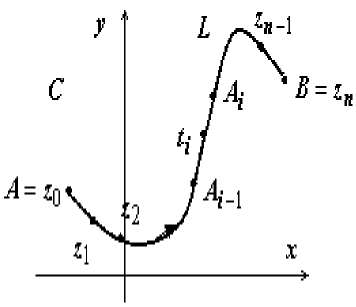
$\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\operatorname{sh} z = -i\cos iz$, $\cos z = \operatorname{ch} iz$, $\sin z = -i\operatorname{sh} iz$, $\operatorname{sh} iz = i\sin z$, $\sin iz = i\sin z$.

5. Функция $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$. Это n-значная функция (раздел **19.1.3**), все значений которой даются формулами $w = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. **Функция** $z^{\frac{m}{n}}$ определяется равенством $z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$.

6. Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определяется при $z \neq 0$ как функция, обратная показательной: $w = \operatorname{Ln} z$, если $z = e^{w}$. Если $w = u + iv$, то последнее равенство означает, что $e^{w} = e^{u+iv} = e^{u}e^{iv} = z = |z|\, e^{i\operatorname{Arg} z}$, откуда $e^{u} = |z| \Rightarrow u = \ln|z|$; $v = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi i$. Таким образом, $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ - функция многозначная (бесконечнозначная); её значение при $k = 0$ называется главным и обозначается $\ln z$: $= \ln|z| + i\arg z$. Так, $\ln(-5) = \ln|-5| + i\arg(-5) = \ln 5 + \pi i$, $\operatorname{Ln}(-5) = \operatorname{Ln}|-5| + i\arg(-5) + 2k\pi i = \ln 5 + i\pi(2k+1)$, где k - произвольное целое число.

7. Общая показательная a^{z} и общая степенная z^{a} (z, a - произвольные комплексные числа, $z, a \neq 0$, a = const) функции определяются соотношениями $a^{z} = e^{z\cdot\operatorname{Ln} a}$, $z^{a} = e^{a\cdot\operatorname{Ln} z}$,и,следовательно, бесконечнозначны.

8. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции определяются так же, как и в действительном случае ($w = \operatorname{Ar\,sh} z$, если $\operatorname{sh} z = w$, например), и выражаются через $\operatorname{Ln} z$.



Интегрирование функций комплексной переменной. Интегральная теорема Коши.

19.6.1. Интеграл от ФКП.

19.6.1.1. Определение. Пусть на комплексной плоскости C задана ориентированная кусочно-гладкая кривая $L = \overset{\cup}{AB}$, на которой определена функция $w = f(z)$. Разобьём кривую точками $z_0 = A, z_1, z_2, \ldots, z_n = B$ на n частей, на каждой из дуг $\overset{\cup}{z_{k-1}z_k}$ выберем произвольную точку t_k, найдём $f(t_k)$ и составим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta z_k \; (\Delta z_k = z_k - z_{k-1})$. Предел последовательности этих сумм при $n \to \infty$, $\max|\Delta z_k| \to 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), если он существует, не зависит ни от способа разбиения кривой на дуги, ни от выбора точек t_k, называется интегралом от функции $w = f(z)$ по кривой L и обозначается $\int_L f(z)\cdot dz = \lim_{\max\limits_{k=1,2,\ldots n}|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta z_k$.

Теорема. Если функция $w = f(z)$ непрерывна на кривой L, то она интегрируема по этой кривой.

Док-во. Распишем действительные и мнимые части всех величин, входящих в интеграл: $z_k = x_k + iy_k$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $t_k = \xi_k + i\zeta_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$, тогда $f(t_k)\cdot\Delta z_k = (u(\xi_k, \zeta_k) + i\,v(\xi_k, \zeta_k))(\Delta x_k + i\,\Delta y_k) = (u(\xi_k, \zeta_{kk})\cdot\Delta x_k - v(\xi_k, \zeta_k)\cdot\Delta y_k) + i\,(u(\xi_k, \zeta_k)\cdot\Delta y_k + v(\xi_k, \zeta_k)\cdot\Delta x_k)$, и сумма $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta z_k$ разобьётся на две $\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\varsigma_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\varsigma_k)\Delta y_k + i\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\varsigma_k)\Delta y_k + v(\xi_k,\varsigma_k)\Delta x_k$. Каждая из этих сумм - интегральная сумма для действительных криволинейных интегралов второго рода, соответственно, $\int_L udx - vdy$ и $\int_L vdx + udy$. Если L - кусочно-гладкая кривая, $w = f(z)$ - непрерывна (тогда непрерывны её координатные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$), то существуют пределы этих сумм при $\max|\Delta z_k| \to 0$ ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) - соответствующие криволинейные интегралы, следовательно, существует $\lim_{\max\limits_{k=1,2,\ldots n}|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta z_k = \int_L f(z)\cdot dz$, и $\int_L f(z)\cdot dz = \int_L u\cdot dx - v\cdot dy + i\int_L v\cdot dx + u\cdot dy$.

19.6.1.2. Свойства интеграла от ФКП. Мы доказали, что $\int_L f(z)\cdot dz$ выражается через два действительных криволинейных интеграла второго рода, поэтому он обладает всеми свойствами этих интегралов:

1. $\int_L (C_1 f_1(z) + C_2 f_1(z))dz = C_1\int_L f_1(z)dz + C_2\int_L f_2(z)dz \quad (C_1, C_2$ - произвольные комплексные постоянные);
2. $\int_{L_1\cup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz \quad (L_1, L_2$ - кривые без общих внутренних точек):
3. $\int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz \quad (L^-$ - кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении;
4. Если l - длина кривой L, $|f(z)| \le M$ при $z \in L$, то $\left|\int_L f(z)dz\right| \le M\cdot l$.

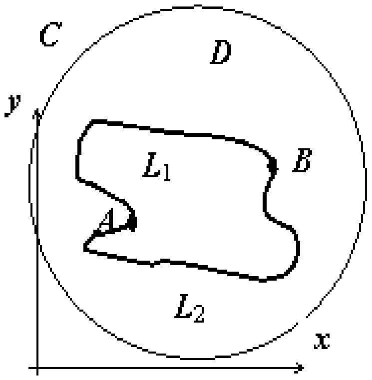
Теорема Коши для односвязной области. Если D - односвязная ограниченная область, $w = f(z)$ - аналитическая в этой области функция, то для любого кусочно-гладкого замкнутого контура L, лежащего в D, интеграл от $f(z)$ по L равен нулю: $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

Доказательство. Т.к. $\oint\limits_L f(z)\cdot dz = \oint\limits_L u\cdot dx - v\cdot dy + i\oint\limits_L v\cdot dx + u\cdot dy$, то, применяя к действительным криволинейным интегралам формулу Грина, получим $\oint\limits_L f(z)\cdot dz = \iint\limits_G \left(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + \iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$ вследствие условий Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$. Символом G в доказательстве обозначена область, заключённая внутри контура L.

Следствие. Для всех кусочно-гладких кривых, лежащих внутри области D, в которой аналитична функция $w = f(z)$, и имеющих общие начальную и конечную точки, интеграл $\int\limits_L f(z)\cdot dz$ имеет одинаковое значение.

Объединение $L_1 \cup L_2^-$ кривых - замкнутый контур, поэтому $\oint\limits_{L_1 \cup L_2^-} f dz = 0 \Rightarrow \oint\limits_{L_1} f dz + \oint\limits_{L_2^-} f dz = 0 \Rightarrow \oint\limits_{L_1} f dz = -\oint\limits_{L_2^-} f dz \Rightarrow \oint\limits_{L_1} f dz = \oint\limits_{L_2} f dz$.

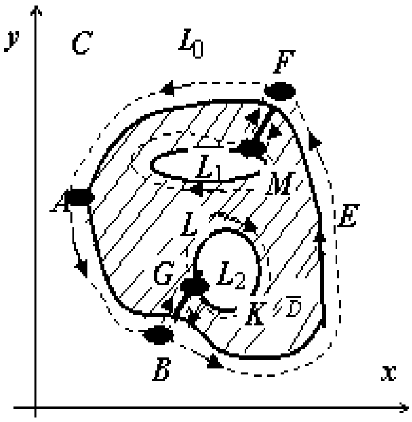
Оказывается, что справедлива и обратная **теорема Морера**: если функция $w = f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, лежащему в D, равен нулю, то функция аналитична в области D.



Теорема Коши для многосвязной области. Если функция $w = f(z)$ аналитична в замкнутой многосвязной ограниченной области $\bar{D}$, ограниченной контурами L_0 (внешняя граница), L_1, L_2, …, L_k, то интеграл от $f(z)$, взятый по полной границе области $\bar{D}$, проходимой так, что область остаётся с одной стороны, равен нулю.

Доказательство Рассмотрим случай, когда граница области $\bar{D}$ (на рисунке область заштрихована) состоит из внешнего контура L_0 и внутренних контуров L_1 и L_2. Соединим контур L_0 разрезом FM с контуром L_1, разрезом BG - с контуром L_2. Область $\bar{D'} = \bar{D} \setminus (BG \cup FM)$ с границей $\Gamma' = \overset{\cup}{AB} \cup BG \cup (L_2 = \overset{\cup}{GLKG}) \cup GB \cup \overset{\cup}{BF} \cup FM \cup L_1 \cup MF \cup \overset{\cup}{FA}$ односвязна, поэтому для неё справедлива интегральная теорема Коши: $\oint\limits_{\Gamma'} f(z)dz = 0$. Интегралы по каждому из разрезов входят в этот общий интеграл дважды в противоположных направлениях и, как следствие, взаимно уничтожаются, поэтому остаются только интегралы по контурам, проходимым так, что область остаётся с одной стороны.

В дальнейшем нам понадобится другая формулировка этой теоремы. Буквами без верхнего индекса будем обозначать контуры, проходимые против часовой стрелки, с верхним минусом - по часовой. Мы доказали, что $\oint\limits_{L_0 \cup L_1^- \cup L_2^-} f dz = 0 \Rightarrow \oint\limits_{L_0} f dz + \oint\limits_{L_1^-} f dz + \oint\limits_{L_2^-} f dz = 0 \Rightarrow \oint\limits_{L_0} f dz = \oint\limits_{L_1} f dz + \oint\limits_{L_2} f dz$. Таким образом, **интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам**, при этом все контуры обходятся в одном направлении.



<u>**Формула Ньютона–Лейбница**</u> Пусть G – односвязная область и $z_0 \in G$, z_0 – фиксированная точка.

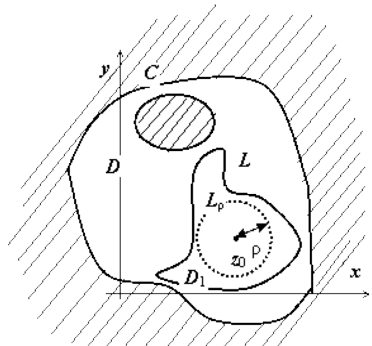
Если f(z) – аналитическая функция в области G, то функция F(z): $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z) dz$ является аналитической в области G и $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$, т. е. F(z) есть первообразная для функции f(z). Тогда интеграл от аналитической функции в области G от точки z_1 до точки z_2, принадлежащих области G, можно вычислить по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

где $\Phi(z)$ первообразная функции f(z) и $\Phi(z) = F(z) + C.$

<u>**Интегральная формула Коши.**</u> Пусть $w = f(z)$ аналитична в области D и L - замкнутая кусочно-гладкая кривая, содержащаяся в D вместе с областью D_1, которую она ограничивает. Тогда для каждой точки $z_0 \in D_1$ имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$



Доказательство. Заметим, что в этой формуле функция в точке z_0 портится как раз введением множителя $\frac{1}{z - z_0}$. Доказательство очень похоже на доказательство того, что $\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i$. Мы окружим точку z_0 окружностью L_ρ радиуса ρ столь малого, что на L_ρ функция $f(z)$ мало отличается от $f(z_0)$: $f(z) \approx f(z)$, тогда $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \approx \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \frac{f(z_0)}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{f(z_0)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z_0)$. Более строго, возьмём ρ столь малым, что окружность L_ρ радиуса ρ с центром в z_0 лежит в D_1. Функция $w = f(z)$ аналитична в двусвязной области, заключенной между L и L_ρ, поэтому (следствие из **19.6.2.2. Теоремы Коши для многосвязной**

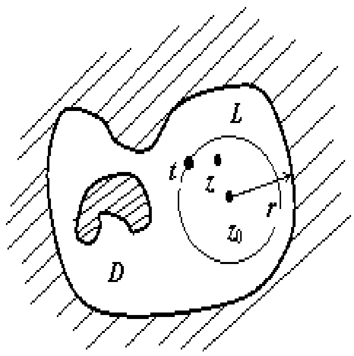
области) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho} \frac{f(z)dz}{z-z_0}$. Распишем последний интеграл: $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz +$

$+\frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{1}{z-z_0}dz$. Второй интеграл здесь равен $\frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{1}{z-z_0}dz = \frac{f(z_0)}{2\pi i}\cdot 2\pi i = f(z_0)$. Первый интеграл а). не зависит от ρ (действительно, подынтегральная функция аналитична в области между L_ρ и $L_{\rho 1}$, где $L_{\rho 1}$ - окружность радиуса $\rho_1 < \rho$, и по тому же следствию из **19.6.2.2. Теоремы Коши для многосвязной области** $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_{\rho 1}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$; б). $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$. Из утверждений а) и б) следует, что первый интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$.

Докажем утверждение б). Обозначим $M_\rho = \max|f(z) - f(z_0)|$ при $z \in L_\rho$, при этом, вследствие непрерывности функции, $M_\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Оценим $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$ по модулю (учитывая, что $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$, $|dz| = \rho\, d\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$): $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le$

$\le \left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{L_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{L_\rho} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{M_\rho\cdot\rho}{\rho}d\varphi = M_\rho \underset{\rho\to 0}{\to} 0$. Утверждение доказано.

Доказана и интегральная формула Коши: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz$.



<u>Ряд Тейлора.</u> Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области D, $z_0 \in D$. Обозначим L окружность с центром в z_0, принадлежащую области D вместе с ограниченным ею кругом. Тогда для любой точки z, лежащей внутри L, $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(t)}{t-z}dt$. Представим множитель $\frac{1}{t-z}$ в виде суммы сходящейся геометрической прогрессии: $\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} =$ (так как $|z - z_0| < |t - z_0|$, то $q = \frac{|z-z_0|}{|t-z_0|} < 1$) $= \frac{1}{t-z_0}\cdot\left(1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3+\ldots\right) = \frac{1}{t-z_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n$, и ряд сходится абсолютно, поэтому его можно почленно интегрировать: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt\cdot(z-z_0)^n=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\cdot(z-z_0)^n$, так как $\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}dt=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Итак, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

Ряд в правой части этого равенства - ряд Тейлора функции ***f***(***z***). Этот ряд абсолютно сходится внутри контура ***L***, а в качестве ***L*** можно взять любую окружность, которая не выходит за пределы области ***D***. Доказана

Теорема о разложении функции в ряд Тейлора. Если функция ***w*** = ***f***(***z***) аналитична в области ***D***, $z_0 \in D$, то функция ***f***(***z***)может быть разложена в ряд Тейлора по степеням $(z - z_0)^n$. Этот ряд абсолютно сходится к ***f***(***z***) внутри круга $|z - z_0| < r$, где ***r*** - расстояние от z_0 до границы области ***D*** (до ближайшей к z_0 точке, в которой функция теряет аналитичность). Это разложение единственно.

Единственность разложения следует из того, что коэффициенты ряда однозначно выражаются через производные функции.

19.8.1.1. Стандартные разложения. Для однозначных функций разложения в ряд Тейлора в принципе не могут отличиться от изучавшихся в прошлом семестре разложений:

1. $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$;
2. $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
3. $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$;
4. $\operatorname{sh} z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
5. $\operatorname{ch} z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$;

Ряд Лорана. Пусть функция ***f***(***z***) аналитична в кольце $\rho \le |z - z_0| \le R$. Тогда для любой точки этого кольца $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_\rho^-}\frac{f(t)}{t-z}dt$; при этом окружности проходятся так, что область остаётся слева. Изменим в интеграле по внутренней окружности направление обхода на противоположное: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_\rho}\frac{f(t)}{z-t}dt$. Интеграл по внешней окружности преобразуем так, как и при выводе формулы Тейлора: $\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{t-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=$ (так как $|z - z_0| < |t - z_0|$, то $q=\frac{|z-z_0|}{|t-z_0|}<1$) $=\frac{1}{t-z_0}\cdot\left(1+\frac{z-z_0}{t-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3+\ldots\right)=\frac{1}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n$, и ряд сходится абсолютно, поэтому его можно почленно интегрировать:

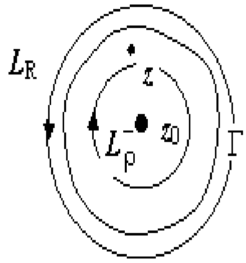
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R}\frac{f(t)}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_R}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt\cdot(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n,$$

где $A_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_R}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n=0,1,2,3,\dots$. Интеграл по внутренней окружности преобразуем аналогично, учитывая только, что на L_ρ $|t-z_0|<|z-z_0|$: $\dfrac{1}{z-t}=\dfrac{1}{z-z_0-(t-z_0)}=\dfrac{1}{z-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{t-z_0}{z-z_0}}=$

$$=\frac{1}{z-z_0}\cdot\left(1+\frac{t-z_0}{z-z_0}+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^2+\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^3+\dots\right)=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

. И здесь ряд сходится абсолютно, поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}\frac{f(t)}{z-t}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}\frac{f(t)}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}f(t)\cdot(t-z_0)^n dt=$$



$=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{-n-1}}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}$,где $A_{-n}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{L_\rho}f(t)\cdot(t-z_0)^{n-1}dt$. Переобозначим $n\to -n$, тогда форма коэффициентов ряда для L_ρ совпадёт с формой коэффициентов ряда для L_R: $A_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_\rho}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n=0,-1,-2,\dots;$ поэтому окончательно для интеграла по L_ρ получим $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_\rho}\dfrac{f(t)}{z-t}dt=\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n(z-z_0)^n$. Докажем, что и контур для вычисления коэффициентов может быть взят один и тот же. Действительно, пусть Γ - кусочно-гладкий контур, расположенный в кольце $\rho\le|z-z_0|\le R$, и точка z_0 расположена внутри этого контура. По теореме Коши для многосвязной области $A_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{L_R}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n=0,1,2,3,\dots$; $A_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{L_\rho}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n=-1,-,2,-3,\dots$, поэтому для любого n $A_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{\Gamma}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt,\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$, и

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n.$$

Этот ряд (содержащий и положительные, и отрицательные степени $(z-z_0)$), называется **рядом Лорана функции $f(z)$.** Его часть, содержащая неотрицательные степени ($\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n$), называется правильной; часть, содержащая отрицательные степени ($\displaystyle\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}$), называется главной. Правильная часть, по самому своему построению, сходится в круге $|z-z_0|\le R$, главная - во внешности круга $|z-z_0|\ge\rho$, поэтому весь ряд сходится в пересечении этих областей, т.е. в кольце $\rho\le|z-z_0|\le R$. Так же, как и для ряда Тейлора, разложение в ряд Лорана единственно.

Еще раз подчеркнем, что в ряд Лорана раскладывается функция, аналитическая в кольце, и ширина этого кольца определяется областью аналитичности функции, т.е. разложение теряет смысл там, где функция теряет аналитичность.

Нули аналитической функции.

Точка a называется нулём порядка k аналитической функции $f(z)$, если $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, но $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Теорема. Для того, чтобы аналитическая в точке a функция $f(z)$ имела в этой точке нуль k -го порядка, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этой точки функция $f(z)$ представлялась в виде $f(z) = (z-a)^k \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая в точке a функция, и $\varphi(a) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка a - нуль k-го порядка функции $f(z)$, т.е. $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, и $f^{(k)}(a) \neq 0$. Тогда её разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = \frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}(z-a)^k + \frac{f^{(k+1)}_{(a)}}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \dots = (z-a)^k\left(\frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!} + \frac{f^{(k+1)}_{(a)}}{(k+1)!}(z-a) + \dots\right) = (z-a)^k \cdot \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = \frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!} + \frac{f^{(k+1)}_{(a)}}{(k+1)!}(z-a) + \dots$$

- аналитическая (как сумма степенного ряда с тем же кругом сходимости, что и у ряда для $f(z)$) функция, $\varphi(a) = \frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!} \neq 0$.

Достаточность. Пусть $f(z) = (z-a)^k \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ - аналитическая в точке a функция, и $\varphi(a) \neq 0$. Находим производные этой функции по формуле Лейбница $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + n\,u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + C_n^3 u^{(n-3)}v^{(3)} + \dots + C_n^2 u'' v^{(n-2)} + n\,u' v^{(n-1)} + u\,v^{(n)}$: $f'(z) = k(z-a)^{k-1}\varphi(z) + (z-a)^k\varphi'(z)$, $f'(a) = 0$; $f''(z) = k(k-1)(z-a)^{(k-2)}\varphi(z) + 2k(z-a)^{(k-1)}\varphi'(z) + (z-a)^{(k)}\varphi''(z)$, $f''(a) = 0$;

…………… …………………………;

$f^{(k-1)}(z) = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(z-a)\,\varphi(z) + C^1_{k-1}k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot(z-a)^2\varphi'(z) + \dots + (z-a)^k\varphi^{(k-1)}(z)$, $f^{(k-1)}(a) = 0$;

$f^{(k)}(z) = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\varphi(z) + C^1_k\, k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot(z-a)\,\varphi'(z) + \dots + (z-a)^k\varphi^{(k)}(z)$, $f^{(k)}(a) = k!\cdot\varphi(a) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что если многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z = 0$ разложен на множители $P_n(z) = a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_l)^{k_l}$, то корни $z_1, z_2, \dots, z_l$ являются нулями функции $P_n(z)$ кратностей, соответственно, $k_1, k_2, \dots, k_l$.

Изолированные особые точки.

19.9.2.1. Определение. Точка a называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична во всех точках, за исключением точки a.

Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (z-a)^k$ в окрестности изолированной особой точки a. При этом возможны следующие случаи.

1. Главная часть ряда Лорана отсутствует: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z-a)^k = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots$.

В этом случае особая точка a называется устранимой.

2. Главная часть содержит конечное число членов: $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} A_k(z-a)^k = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \dots,\ A_{-n} \neq 0$.

В этом случае особая точка а называется полюсом n-го порядка. Если n =1, полюс называется простым, в остальных случаях - кратным.

3. Главная часть содержит бесконечно много членов. В этом случае особая точка a называется существенно особой точкой.

19.9.2.2. Признаки особых точек по значению $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

1. Для того, чтобы особая точка $z = a$ была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = C$, $C \neq \infty$.

Док-во. Выпишем разложение $f(z)$ в ряд Лорана: $f(z) = \ldots + \dfrac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \dfrac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$. Очевидно, что $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ может быть конечным тогда и только тогда, когда отсутствуют члены с отрицательными степенями, т.е. отсутствует главная часть, т.е. $z = a$ – устранимая особая точка. В этом случае $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A_0$.

2. Для того, чтобы особая точка $z = a$ была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал бесконечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Докажем теорему, из которой следует это утверждение.

Теорема. Для того, чтобы особая точка $z = a$ была полюсом n-го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности этой точки $f(z)$ представлялась в виде $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая в точке a функция, $\varphi(a) \neq 0$.

Док-во. Необходимость. Пусть $f(z)$ имеет в точке $z = a$ была полюс n-го порядка, т.е. $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} A_k(z-a)^k = \dfrac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \dfrac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,\ A_{-n} \neq 0$. Преобразуем это выражение:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \left(A_{-n} + A_{-n+1}(z-a) + A_{-n+2}(z-a)^2 + \ldots + A_0(z-a)^n + A_1(z-a)^{n+1} + A_2(z-a)^{n+2} + \ldots\right).$$

Обозначим $\varphi(z)$ сумму ряда, стоящего в скобках: $\varphi(z) = A_{-n} + A_{-n+1}(z-a) + A_{-n+2}(z-a)^2 + \ldots + A_0(z-a)^n + A_1(z-a)^{n+1} + A_1(z-a)^{n+2} + \ldots$.

Ряд Лорана функции $f(z)$ сходится в некотором кольце $0 < |z - a| < r$. Пусть точка z_1 принадлежит этому кольцу. Ряд для $\varphi(z)$ сходится в этой точке, так как он отличается от сходящегося ряда для $f(z)$ только постоянным множителем $\dfrac{1}{(z_1-a)^n}$; по теореме Абеля ряд для $\varphi(z)$ сходится в круге $|z - a| < |z_1 - a|$, и $\varphi(z)$ аналитична в этом круге как сумма степенного ряда.

Достаточность. Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая в точке a функция, $\varphi(a) \neq 0$. Разложим $\varphi(z)$ в ряд Тейлора: $\varphi(z) = B_0 + B_1(z-a) + B_2(z-a)^2 + \ldots + B_k(z-a)^k + \ldots$. Тогда $f(z) = \dfrac{B_0}{(z-a)^n} + \dfrac{B_1}{(z-a)^{n-1}} + \dfrac{B_2}{(z-a)^{n-2}} + \ldots$, т.е. главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ начинается с члена $\dfrac{B_0}{(z-a)^n}$, где $B_0 = \varphi(a) \neq 0$, т.е. точка $z = a$ – полюс n-го порядка.

Следствие. Точка $z = a$ – полюс n-го порядка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{n \to \infty} (z-a)^n f(z) \neq 0$.

Теорема о связи нулей и полюсов. Функция $f(z)$ имеет в точке $z = a$ – полюс n-го порядка тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке нуль n-го порядка.

Вычет аналитической функции в особой точке. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D за исключением точки a. Разложим $f(z)$ в окрестности этой точки в ряд Лорана:
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k (z-a)^k = \ldots + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

Коэффициент A_{-1} называется вычетом функции $f(z)$ в точке a и обозначается $\operatorname*{res}_a f(z)$. Если γ - произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, расположенный в области D и содержащий внутри себя точку a, то, согласно общей формуле для коэффициентов ряда Лорана (см. **19.8.3. Ряд Лорана**), получаем другое, эквивалентное, определение вычета, $\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(t)dt = A_{-1}$.

Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

Это следует из определения устранимой особой точки: главная часть ряда Лорана отсутствует, все коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю, $A_{-1} = 0$.

Вычеты в полюсах.

19.9.3.2.1. **Если a - простой полюс функции $f(z)$, то** $\operatorname*{res}_a f(z) = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$.

Док-во. Простой полюс - полюс первого порядка, поэтому разложение в ряд Лорана начинается с минус первой степени: $f(z) = \frac{A_{-1}}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$. Тогда $(z-a) f(z) = A_{-1} + A_0(z-a) + A_1(z-a)^2 + A_2(z-a)^3 + \ldots$, и $\operatorname*{res}_a f(z) = A_{-1} = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right]$.

19.9.3.2.2. **Пусть** $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$**, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - аналитические в окрестности точки a функции. Если a - простой нуль функции $\psi(z)$, и $\varphi(a) \neq 0$, то** $\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

Док-во. Если a - простой нуль функции $\psi(z)$, и $\varphi(a) \neq 0$, то a – простой полюс функции $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Тогда, по предыдущему утверждению,
$$\operatorname*{res}_a f(z) = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right] = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$
$$= \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)}{z-a}} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\lim_{z\to a}\varphi(z)}{\lim_{z\to a}\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

19.9.3.2.3. **Если a - полюс функции $f(z)$ n-го порядка, то** $\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)\right]$.

Док-во. Так как точка $z = a$ - полюс n-го порядка функции $f(z)$, то $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} A_k (z-a)^k = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,\ A_{-n} \neq 0$. Для того, чтобы удалить особенность в точке a, умножим $f(z)$ на $(z-a)^n$: $(z-a)^n f(z) = A_{-n} + A_{-n+1}(z-a) + \ldots + A_{-1}(z-a)^{n-1} + A_0(z-a)^n + A_1(z-a)^{n+1} + \ldots$. Теперь, чтобы убрать первые члены этой формулы и добраться до A_{-1}, дифференцируем это произведение n-1 раз:

$$\frac{d}{dz}\left((z-a)^n f(z)\right) = A_{-n+1} + 2A_{-n+2}(z-a) + \ldots + (n-1)A_{-1}(z-a)^{n-2} + nA_0(z-a)^{n-1} + (n+1)A_1(z-a)^n + \ldots$$

,

$$\frac{d^2}{dz^2}\left((z-a)^n f(z)\right) = 2A_{-n+2} + 3\cdot 2A_{-n+3}(z-a) + \ldots + (n-1)(n-2)A_{-1}(z-a)^{n-3} + n(n-1)A_0(z-a)^{n-2} + \ldots$$

,

……,

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right) = (n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot A_{-1} + n(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot A_0(z-a) + \ldots = (n-1)!A_{-1} + n!A_0(z-a) + \ldots$$

, $\lim\limits_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right) = (n-1)!A_{-1}$, откуда и следует доказываемая формула.

Бесконечно удалённая особая точка. Будем считать точку $z = \infty$ особой точкой любой аналитической функции. В разделе **19.1.6. Окрестности точек плоскости** $\overline{C}$ мы определили окрестности этой точки как внешности кругов с центром в начале координат: $U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \overline{C} \mid |z| > \varepsilon\}$. Точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой аналитической функции $w = f(z)$, если в некоторой окрестности этой точки нет других особых точек этой функции. Для определения типа этой особой точки сделаем замену переменной $z_1 = \frac{1}{z}$, при этом точка $z = \infty$ переходит в точку $z_1 = 0$, функция $w = f(z)$ примет вид $w = f\left(\frac{1}{z_1}\right) = \varphi(z_1)$. Типом особой точки $z = \infty$ функции $w = f(z)$ будем называть тип особой точки $z_1 = 0$ функции $w = \varphi(z_1)$. Если разложение функции $w = f(z)$ по степеням z в окрестности точки $z = \infty$, т.е. при достаточно больших по модулю значениях z, имеет вид $f(z) = \ldots + \frac{A_{-n}}{z^n} + \frac{A_{-n+1}}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z} + A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots$, то, заменив z на $\frac{1}{z_1}$, получим $\varphi(z1) = \ldots + A_{-n}\cdot z_1^n + A_{-n+1}\cdot z_1^{n-1} + \ldots + A_{-1}\cdot z_1 + A_0 + \frac{A_1}{z_1} + \ldots + \frac{A_n}{z_1^n} + \ldots$. Таким образом, при такой замене переменной главная и правильная части ряда Лорана меняются местами, и тип особой точки $z = \infty$ определяется количеством слагаемых в правильной части разложения функции в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = 0$. Поэтому

1. Точка $z = \infty$ - устранимая особая точка, если в этом разложении правильная часть отсутствует (за исключением, возможно, члена A_0);
2. Точка $z = \infty$ - полюс n-го порядка, если правильная часть заканчивается слагаемым $A_n \cdot z^n$;
3. Точка $z = \infty$ - существенно особая точка, если правильная часть содержит бесконечно много членов.

При этом остаются справедливыми признаки типов особых точек по значению $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$: если $z = \infty$ - устранимая особая точка, то этот предел существует и конечен, если $z = \infty$ - полюс, то этот предел бесконечен, если $z = \infty$ - существенно особая точка, то этот предел не существует (ни конечный, ни бесконечный).